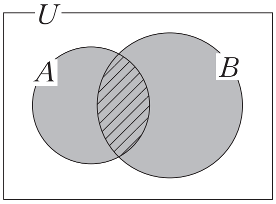
PART4 和事象の確率，余事象の確率

要点① 一般の和事象の確率

2つの集合 A，B について

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

が成り立つ。この式の各辺を $n(U)$ で割ることにより，次の等式が成り立つ。



和事象の確率

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

例 52枚1組のトランプから1枚を取り出すとき，絵札またはスペードである確率を求める。

「絵札が出る」という事象を A，「スペードである」という事象を B とすると

$P(A)=$　　，$P(B)=$

また，「絵札　　　スペードである」という事象 $A\cap B$ について

$P(A\cap B)=$

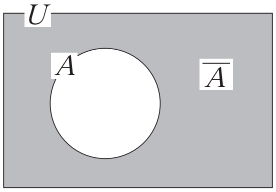
よって，求める確率は

$P(A\cup B)=$

$$=\frac{12}{52}+\frac{13}{52}-\frac{3}{52}=\frac{22}{52}=\frac{11}{26}$$

要点② 余事象の確率

事象 A に対して，「A が起こらない」という事象を，A の「　　　　　」といい，「　　」で表す。余事象 $\overline{A}$ は全事象 U における A の補集合 $\overline{A}$ で表される。



事象 A とその余事象 $\overline{A}$ は互いに排反であることから確率の加法定理により

$P(A\cup\overline{A})=$

また，A と $\overline{A}$ の和事象は全事象 U であることから

$P(A\cup\overline{A})=$

よって　$P(A)+P(\overline{A})=P(U)$　が成り立つ。

$P(U)=1$ であることから，次の等式が成り立つ。

余事象の確率

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

例　2個のさいころを同時に投げるとき，同じ目が出ない確率を求める。

「同じ目が出ない」という事象は，「同じ目が出る」という事象の余事象である。

同じ目が出る確率は

よって，求める確率は　$=1-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$

4 (1) 男子4人, 女子3人を横1列に並べるとき, 左端または右端が男子である確率を求めよ。

(2) 1から7までの数が書かれたカードが，各数字2枚ずつ，合計14枚ある。この中から2枚同時に取り出すとき，次の確率を求めよ。

(i) 少なくとも1枚は1である確率

(ii) 2枚が異なる数字である確率

Point Pickup

和事象の確率

事象 A，B について，A と B の和事象，すなわち「A または B」が起こる確率 $P(A\cup B)$ について

事象 A，B が互いに排反であるとき

$\Rightarrow\quad P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ （確率の加法定理）

事象 A，B が互いに排反ではないとき

$\Rightarrow\quad P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

事象 A と事象 B が同時に起こりえるか，がポイント

余事象の確率

$P(\overline{A})=1-P(A)$

ある事象 A の確率を求めるときは，その余事象 $\overline{A}$ の確率の利用をつねに頭に入れておくとよい。また，「……でない」「少なくとも……である」「同じ(異なる)」といった確率を求める際には，余事象の利用が有効な場合がある。

第 4 講　PART4 確認問題

1　男子 3 人，女子 2 人の合計 5 人が横 1 列に並ぶとき，左端が男子であるかまたは右端が女子である確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}$ である。

2　1 から 8 までの数が 1 つずつ書かれた赤いカードと青いカードがそれぞれ 8 枚，合計 16 枚ある。この中から 2 枚を引くとき，引いたカードに書かれた数の和が 5 にならない確率は $\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$ である。

3　1 から 8 までの数が 1 つずつ書かれた赤いカードと青いカードがそれぞれ 8 枚，合計 16 枚ある。この中から 2 枚を引くとき，少なくとも 1 枚は赤いカードである確率は $\dfrac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$ である。

PART4 和事象の確率，余事象の確率

4 (1) 男子 4 人, 女子 3 人を横 1 列に並べるとき, 左端または右端が男子である確率を求めよ。

(2) 1 から 7 までの数が書かれたカードが，各数字 2 枚ずつ，合計 14 枚ある。この中から 2 枚同時に取り出すとき，次の確率を求めよ。

(i) 少なくとも 1 枚は 1 である確率

(ii) 2 枚が異なる数字である確率

[解答]

(1) 左端が男子である確率は $\dfrac{4\times6!}{7!}=\dfrac{4}{7}$

右端が男子である確率は $\dfrac{4\times6!}{7!}=\dfrac{4}{7}$

両端が男子である確率は $\dfrac{{}_4P_2\times5!}{7!}=\dfrac{2}{7}$

よって，求める確率は，$\dfrac{4}{7}+\dfrac{4}{7}-\dfrac{2}{7}=\dfrac{6}{7}$

(2)(i) 「少なくとも 1 枚は 1 である」事象は，「2 枚とも 1 でない」事象の余事象である。

2 枚とも 1 でない確率は $\dfrac{{}_{12}C_2}{{}_{14}C_2}=\dfrac{66}{91}$

よって，求める確率は $1-\dfrac{66}{91}=\dfrac{25}{91}$

(ii) 「2 枚が異なる数字である」事象は，「2 枚が同じ数字である」事象の余事象である。

2 枚が同じ数字である確率は $\dfrac{7}{{}_{14}C_2}=\dfrac{7}{91}=\dfrac{1}{13}$

よって，求める確率は $1-\dfrac{1}{13}=\dfrac{12}{13}$

第 4 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：7，イウ：10

[解説]

左端が男子であるという事象を A,

右端が女子であるという事象を B

とすると，求める確率は $P(A\cup B)$ である。 [A]

ここで，左端が男子である確率は,

$$P(A)=\frac{3\times4!}{5!}=\frac{3}{5}$$

右端が女子である確率は,

$$P(B)=\frac{2\times4!}{5!}=\frac{2}{5}$$

また，$A\cap B$ は左端が男子で右端が女子であるという事象であるから， [B]

$$P(A\cap B)=\frac{3\times2\times3!}{5!}=\frac{3\cdot2}{5\cdot4}=\frac{3}{10}$$

よって，求める確率は,

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$ [C]

$$=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}-\frac{3}{10}=\mathbf{\frac{7}{10}}$$

[A]　事象を設定して考えるとわかりやすい。

[B]　A と B は排反ではないことに注意する。

[C]　和事象の確率
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

2 [正解] エオ：14，カキ：15

[解説]

2 枚引くとき，引いたカードに書かれた数の和が 5 になるという事象を C とすると，求める確率は $P(\overline{C})$ である。[D]

起こりうるすべての場合の数は，

$${}_{16}C_2 = \frac{16\cdot 15}{2\cdot 1} = 120\text{(通り)}$$

事象 C の起こる場合の数は，引いたカードが 1 と 4，2 と 3 の場合がそれぞれ 4 通りずつあるから，

$$4\times 2 = 8\text{(通り)}$$

よって，$P(C) = \dfrac{8}{120} = \dfrac{1}{15}$

求める確率は，

$$P(\overline{C}) = 1 - P(C) \quad \text{[E]}$$

$$= 1 - \frac{1}{15} = \mathbf{\frac{14}{15}}$$

[D]　和が 5 にならない
↓　余事象
和が 5 になる

[E]　$P(C)+P(\overline{C})=1$ より，
$P(\overline{C}) = 1 - P(C)$

3 [正解] クケ：23，コサ：30

[解説]

2 枚引くとき，少なくとも 1 枚は赤いカードであるという事象を D とすると，D の余事象は，

「引いたカードがどちらも青いカードである」

という事象になる。[F]

$\overline{D}$ の起こる場合の数は，

$${}_{8}C_2 = \frac{8\cdot 7}{2\cdot 1} = 28\text{(通り)}$$

よって，$P(\overline{D}) = \dfrac{28}{120} = \dfrac{7}{30}$

求める確率は，

$$P(D) = 1 - P(\overline{D}) \quad \text{[G]}$$

$$= 1 - \frac{7}{30} = \mathbf{\frac{23}{30}}$$

[F]　少なくとも 1 枚は赤いカード
↓　余事象
2 枚とも青いカード

[G]　D よりも $\overline{D}$ の方が求めやすいときに余事象の確率 ($P(D)=1-P(\overline{D})$) を使うとよい。